数理解析研究所講究録
289巻 1977年 61-65

強擬凸多様体の上のToeplitz作用素のなすC^*代数

東北大 理　佐藤 肇
藪田公三

ここではnormal Stein space上の強擬凸領域で定義されたToeplitz作用素のなすC^*代数を考え，Brown-Douglas-Fillmoreによって導入されたExtの具体的な例となる*algebraのshort exact sequenceを作ることを目的とする．

Ωはnormal Stein space Mの中のrelatively compactな強擬凸領域とし，$\partial\Omega$の各点はMのregular ptであるとする。Ωおよび$\partial\Omega$には自然な測度が入っているものとし，それらに関するL^2空間をそれぞれ$L^2(\Omega)$, $L^2(\partial\Omega)$で表わす．さらに

$$H^2(\Omega) \underset{\text{def}}{=} \{ f \in L^2(\Omega) : f \text{ hol. in } \Omega \}$$

$H^2(\partial\Omega) \underset{\text{def}}{=} \{ f \in C^\infty(\partial\Omega) ;$ fはΩに正則に拡張されうる$\}$の$L^2(\partial\Omega)$閉包

とする．そして，Πで$L^2(\Omega)$から$H^2(\Omega)$（及び$L^2(\partial\Omega)$から$H^2(\partial\Omega)$）への正射影を表わす．$\phi \in C(\overline{\Omega})$（及び$\in C(\partial\Omega)$）に対してsymbol ϕのToeplitz作用素T_ϕを次で定義する．

$$T_\phi f = \Pi M_\phi f \ , \quad f \in H^2(\Omega) \ (\text{及び } H^2(\partial\Omega)) ,$$

ここで M_ϕ は $M_\phi g = \phi g$, $g \in L^2(\Omega)$ ($L^2(\partial\Omega)$) で定義される作用素とする.

$\mathcal{T}(\Omega)$ を $\{T_\phi ; \phi \in C(\overline{\Omega})\}$ で生成される C^* 代数とする。同じように $\mathcal{T}(\partial\Omega)$ を定義する. すると, まず

$$\xi : \phi \in C(\overline{\Omega}) \longrightarrow T_\phi \in \mathcal{T}(\Omega)$$
$$(\varphi \in C(\partial\Omega) \longrightarrow T_\varphi \in \mathcal{T}(\partial\Omega))$$

は contractive かつ *-linear である. さて, 勝手な Hilbert 空間 H に対して, $\mathcal{L}(H)$ で H 上の有界線形作用素の全体と定義し, $\mathcal{LC}(H)$ で $\mathcal{L}(H)$ の中の compact 作用素の全体とする. よく知られているように, $\mathcal{LC}(H)$ は $\mathcal{L}(H)$ の極小閉イデアルである。

我々の求めるものは次の二つである.

定理 1. 次のような $\mathcal{T}(\Omega)$ から $C(\partial\Omega)$ の上への * 準同型 ρ が存在する.

$$0 \longrightarrow \mathcal{LC}(H^2(\Omega)) \xrightarrow{i} \mathcal{T}(\Omega) \xrightarrow{\rho} C(\partial\Omega) \longrightarrow 0 \quad \text{(exact)}$$

かつ, $\rho(T_\phi) = \phi|_{\partial\Omega}$, $\phi \in C(\overline{\Omega})$, i は inclusion map.

定理 2. 次のような, ξ を cross section とする, $\mathcal{T}(\partial\Omega)$ から $C(\partial\Omega)$ の上への * 準同型 ρ が存在する.

$$0 \longrightarrow \mathcal{LC}(H^2(\partial\Omega)) \xrightarrow{i} \mathcal{T}(\partial\Omega) \xrightarrow{\rho} C(\partial\Omega) \longrightarrow 0 \quad \text{(exact)}$$

定理2は $\Omega=\{z\in\mathbb{C};|z|<1\}$ のときはよく知られている．$\mathbb{C}$ の中の multiply connected domain の場合は Abrahamse により，又 $\mathbb{C}^n$ の sphere のときは Coburn によって与えられている．定理1は $\Omega\subset\mathbb{C}^n$ のとき Venugopalkrishna, Coburn, Janas (+Yabuta の注意) で与えられている．

さて定理の証明には次のような補題を使えばよい。

補題1．$\phi\in C(\overline{\Omega})$ (resp. $\in C(\partial\Omega)$) なら

$$(1-\pi)M_\phi\ ;\ H^2(\Omega)\longrightarrow L^2(\Omega)$$

(resp. $(1-\pi)M_\phi;\ H^2(\partial\Omega)\longrightarrow L^2(\partial\Omega)$)

は compact 作用素である．

補題2．$\phi\in C(\overline{\Omega})$ かつ $\phi=0$ on $\partial\Omega$ なら

$$M_\phi\ :\ H^2(\Omega)\longrightarrow L^2(\Omega)$$

は compact 作用素である．

定理(Bunce)．H：Hilbert 空間．$\{T_\alpha\,;\,\alpha\in J\}$ は hyponormal operators の commuting family とする．$\mathcal{T}$ は $\{T_\alpha:\alpha\in J\}$ で生成される C^*-代数とし，$\mathcal{C}(\mathcal{T})$ は $\mathcal{T}$ の commutator ideal とする．すると次のような $\mathcal{T}$ から $C(\sigma_\pi(T_\alpha\,;\,\alpha\in J))$ 上への *準同型 η が存在する．

$$0\longrightarrow\mathcal{C}(\mathcal{T})\xrightarrow{i}\mathcal{T}\xrightarrow{\eta}C(\sigma_\pi(T_\alpha:\alpha\in J))\longrightarrow 0\quad(\text{exact})$$

かつ

$$\tau(T_\alpha)(\lambda) = P_\alpha(\lambda), \quad \lambda \in \sigma_\pi(T_\beta ; \beta \in J).$$

ここで $P_\alpha : \sigma_\pi(T_\beta ; \beta \in J) \longrightarrow \mathbb{C}$ （α成分へのprojection）.

$\sigma_\pi(T_\alpha ; \alpha \in J)$ は $\{T_\alpha ; \alpha \in J\}$ の joint approximate point spectrum で

$$\sigma_\pi(T_\alpha ; \alpha \in J) \underset{\text{def}}{=\!=} \operatorname*{proj\,lim}_{\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\} \subset J} \sigma_\pi(T_{\alpha_1}, \cdots, T_{\alpha_n})$$

$$\sigma_\pi(T_{\alpha_1}, \cdots, T_{\alpha_k}) = \{\lambda \in \mathbb{C}^k ; \mathcal{L}(H)(T_{\alpha_1} - \lambda_1) + \cdots + \mathcal{L}(H)(T_{\alpha_k} - \lambda_k) \neq \mathcal{L}(H)\}.$$

また $\pi : \mathcal{T} \to \mathcal{T}/\mathcal{C}(\mathcal{T})$ への射影とする.

系. $T_1, T_2, \cdots, T_k \in \{T_\alpha ; \alpha \in J\}$ なら

$$\sigma_\pi(T_1, \cdots, T_k) = \sigma(\pi(T_1), \cdots, \pi(T_k))$$

ここで右辺は可換Banach代数 $\mathcal{T}/\mathcal{C}(\mathcal{T})$ での joint spectrum.

次に A を $\bar{\Omega}$ の近傍で正則な函数の $C(\bar{\Omega})$ (resp. $C(\partial\Omega)$) での閉包とすると, A の Shilov 境界は $\partial\Omega$ である. $\mathcal{T}(A)$ で $\{T_\phi ; \phi \in A\}$ で生成された C^*-代数とする.
$\phi \in A$ なら T_ϕ は subnormal 従って hyponormal であることを注意しておこう.

補題 3.

$$\mathcal{T}(A, \Omega) = \mathcal{T}(\Omega)$$

$$(\text{resp. } \mathcal{T}(A, \partial\Omega) = \mathcal{T}(\partial\Omega)).$$

補題4. $\mathcal{C}(\mathcal{T}(\Omega)) = \mathcal{LC}(H^2(\Omega))$, $\mathcal{C}(\mathcal{T}(\partial\Omega)) = \mathcal{LC}(H^2(\partial\Omega))$.

補題5. $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_k \in A$ なら

$$\sigma_\pi(T_{\phi_1}, T_{\phi_2}, \cdots, T_{\phi_k}) = \{(\phi_1(x), \phi_2(x), \cdots, \phi_k(x)) ; x \in \partial\Omega\}.$$

最後に定理1,2と K-theory, pseudo-differential operator との関連について触れたい。

参考文献

[1] M.B. Abrahamse, Toeplitz operators on multiply-connected regions, Amer. J.Math.,96(1974),261-297.

[2] J. Bunce, The joint spectrum of commuting nonnormal operators, Proc. Amer. Math. Soc., 29(1971), 499-505.

[3] L.A. Coburn, Singular integral operators and Toeplitz operators on odd spheres, Indiana Univ. Math. J., 23(1973), 433-439.

[4] G.B. Folland and J.J. Kohn, The Neumann problem for Cauchy-Riemann complex, Annals of Math. Studies, 75, 1972.

[5] J. Janas, Toeplitz operators related to certain domains in C^n, Studia Math., 54(1975), 73-79.

[6] U. Venugopalkrishna, Fredholmoperators associated with stronglypseudoconvex domains in C^n, J. Funct. Anal., 9(1972),344-373.

[7] K. Yabuta, A remark to a paper of JANAS: Toeplitz operators related to certai certain domains in C^n, to appear in Studia Math..

[8] W. Zelazko, On a problem concernig joint approximate point spectra, Studia Math., 45(1973), 239-240.

[9] R.G. Douglas, Banach algebra techniques in the theory of Toeplitz operators CBMS, Amer. Math. Soc. 15, 1972.

[10] L.G.Brown, R.G.Douglas and P.A.Fillmore, Unitary equivalence modulo the compact operators and extensions of C*-algebras, Lecture Notes in Math. 345,Springer-Verlag, 1973.

[11] M.F. Atiyah, Global theory of elliptic operators, Proc. Inter. Conf. Funct. Anal. and related Topics, 1969. Tokyo(1970), 21-30.